

LA SÉMANTIQUE CHEZ TARSKI ET THOM

ABDELKADER BACHTA



INTRODUCTION : COMPRENDRE LA RELATION ENTRE TARSKI ET THOM SOUS LE RAPPORT DE LA SÉMANTIQUE.

- Tarski et Thom, auteurs des deux grandes écoles différentes de modélisation mathématique, s'accordent sur la prégnance de la sémantique au dépend de la syntaxe. Tel est, comme on le sait, pour ainsi dire, le couronnement du processus de Tarski en logique. La même idée est fondamentale dans le modélisme de R Thom¹

- Nous proposons de comprendre la relation de nos deux auteurs illustres sous ce rapport précis. Ce qui serait un sujet inédit dans ce domaine.

- Pour cela, il nous faut préciser les assises mathématiques des deux concepts de sémantique en usage ; cette considération nous permettrait de déterminer l'orientation générale des deux penseurs en question : l'algèbre nous tirerait vers une conception plus abstraite que celle fondée sur la géométrie qui est plus proche du concret.

- Pour aller au fond de notre appréciation, il serait nécessaire de faire appel à l'ontologie qui est inhérente à toute activité rationnelle, indispensable à toute étude sémantique et dont le lien avec les mathématiques est certain²

¹ Pour Thom, cf., par exemple, notre étude "la modélisation de la morphogenèse" In DOGMA.

² En ce qui concerne le rapport entre la sémantique et l'ontologie, Cf. par ex. Frédéric Nef, « Sémantique » n°2, Avril 1992.

- Mais le point de départ de nos analyses devrait être celui de nos deux auteurs qui en partent explicitement ; nous voulons parler de la logique mathématique. L'histoire de ce repère commun montre, d'ailleurs, qu'il implique une dimension mathématique et une autre qui est ontologique.³

Il est important de noter, à ce propos, que la tradition, en logique mathématique, comprend deux directions distinctes, mais communicantes :

- 1) Un mouvement essentiellement syntaxique où la notion de vérité est souvent implicite. Nous voulons indiquer, ici, le processus allant de Boole pour arriver à Gödel en passant par Hilbert.
- 2) L'autre est caractérisé par des recherches sémantiques fondamentales qui n'excluent pas l'intérêt pour la syntaxe que les auteurs de ce groupe ont même perfectionnée. Nous faisons allusion, là, à Frege, Moore, Russell et au *Tractatus* de Wittgenstein.

I LES RAPPORTS À LA LOGIQUE MATHÉMATIQUE CHEZ TARSKI ET THOM : DÉPASSEMENT INTERNE ET CRITIQUE EXTERNE.

1) TARSKI ET LE DÉPASSEMENT INTERNE.

- a) Au niveau du mouvement formalisant inauguré par G Boole, on peut dire, pour résumer, que Tarski a sorti la logique de l'impérialisme syntaxique qui lui est associé. Le fondateur de ce processus a permis de calculer tous les éléments du discours formalisé sans exception et de parler de la cohérence et de la consistance rigoureuse de celui-ci. Cette thèse, marquant la prégnance de l'axiomatique, nous rappelle les travaux de Cantor (et de Zermelo), mais aussi, évidemment, le premier théorème dit de complétude de Gödel. Une année après celui-ci produisit le théorème d'incomplétude qui paraît être en contradiction avec le premier et remettre en question tout le mouvement syntaxique antérieur. On a souvent pensé de cette manière. Gödel clarifie bien son point de vue dans une lettre adressée à son ami, Rapport du 02 août 1962. Voici l'essentiel du texte : « *Mes théorèmes montrent, uniquement, que la mécanisation des mathématiques, autrement dit, l'élimination de l'esprit et des entités abstraites est impossible, si l'on veut avoir des fondements et un système satisfaisant pour les mathématiques.* » Il ajoute, par suite, en substance, que l'indécidabilité des questions mathématiques, l'impossibilité des démonstrations de consistance sont étrangères à sa pensée. En fait, il pense que « la combinaison » des symboles qu'implique la syntaxe formalisante ne suffit pas, le texte, là-dessous, est clair ; l'auteur

³ Cf. L'empirisme logique de P Jacob Ed Minuit, 1980 et notre étude in DOGMA, intitulé "la théorie du modèle chez Tarski"

croit, fermement, qu'on a besoin de remonter au métalangage, à l'esprit pour penser judicieusement les mathématiques. C'est ce que Tarski a bien compris dans un travail postérieur. La solution, chez celui-ci, serait le concept de modèle dont la signification est sémantique.⁴

- b) D'autre part, Tarski a trouvé dans l'autre direction de la logique mathématique certains éléments sémantiques comme la dualité du métalangage et du langage-objet, dont il part, explicitement, dans le développement menant à sa conception du modèle. Cette distinction se trouve, littéralement, chez Russel, dans *la théorie des types* et dans sa préface *au Tractatus*. Nous avons, montré dans un Travail antérieur⁵, qu'elle n'est pas étrangère aux travaux de Frege, de Moore et de Wittgenstein lui-même.⁶

D'un autre côté, notre auteur rejoint ses prédécesseurs au niveau de l'idéalité qui caractérise leur pensée et s'inscrit, lui-même, dans cette tendance qui réunit les penseurs appartenant à la famille des logiciens. Cette idée s'éclaircira, d'ailleurs, dans les prochaines analyses. Cependant le concept de modèle chez Tarski est neuf. C'est une innovation par rapport à l'héritage antérieur

L'énoncé suivant définissant le modèle chez Tarski n'existe nulle part chez les prédécesseurs : « Soit une classe ordinaire L., remplaçons les constantes extralinguistiques qui y sont contenues par des variables ; on obtient une classe L'. Il y a lieu, alors, de poser que toute classe quelconque qui satisfait à toutes les fonctions propositionnelles de L' est un modèle de la classe L. »⁷ Par conséquent, appartenant bien à la logique mathématique et s'inspirant, clairement, des deux grandes écoles qu'elle renferme, Tarski dépasse cette logique et va au-delà des ses deux grandes orientations. Il s'agit, donc, bien d'un dépassement interne. Ce qui ne va pas être le cas de R. Thom.

2) THOM ET LA CRITIQUE EXTERNE

R. Thom, s'arrête, plutôt, au formalisme booléen et se montre comme un critique sévère de ce courant. Voici ce qu'il dit, par exemple : « Certains ont pu croire que la logique formelle issue de Boole au 19^e siècle avait offert une réalisation de la mathématique universelle.

Lourde erreur. Cet exemple montre bien, en fait, pourquoi le rêve leibnizien débouche sur l'impossible, car la logique en se constituant comme langage formel d'une rigueur absolue rompt ses attaches avec le monde réel ; l'itération indéfinie des opérations crée des objets fantasmatiques comme on l'a vu dans la théorie des transfinis de Cantor. A vouloir maintenir dans la langue une générativité sans fin,

⁴ Ibid

⁵ Ibid, in DOGMA

⁶ Ibid, in DOGMA

⁷ Cité par P. Jacob dans son livre cité, p 115.

l'expression formelle perd tout contact avec son signifié, en fait, perd tout sens. »⁸
Du reste, R. Thom a insisté, dans d'autres textes, sur ce défaut de signification accompagnant la syntaxe : Il souligne, ailleurs, par exemple, en évoquant la question de l'implication (qui est chez lui, nécessairement, associée au formalisme) « que la signification s'éclipse devant la structure de la déduction, car le propre de toute implication logique est la perte en contenu intentionnel ». ⁹

Au fond ce que reproche l'auteur au formalisme, c'est de produire un discours vide, irréel, c'est d'avoir omis la sémantique. Ces cadres abstraits que produit le formalisme logique ont besoin d'un contenu dont l'auteur précise la nature qui a trait à sa topologie différentielle et que nous préciserons dans les analyses ultérieures. La critique thomienne va jusqu'aux sciences qui s'appuient sur le formalisme logique comme a) La linguistique formelle (Il prend le cas de Bloomfield et de Harris b) Les sciences cognitives (l'intelligence artificielle, la systémique et la cybernétique).

- a) A propos de la linguistique, l'auteur part de l'idée de la représentation de la phrase élémentaire comme un arbre et montre que cette conception rencontre des difficultés énormes. Thom déclare alors : « ...devant ces difficultés une école formaliste a repris en linguistique le programme de formalisation à la Hilbert. Elle prétend (Bloomfield, Harris) qu'une étude correcte du langage, part et doit se faire indépendamment de toute référence à la signification.

On traite une langue donnée comme un système formel dont on s'efforce de spécifier les axiomes qui définissent les expressions bien formées » ; bien entendu, l'auteur ne peut pas admettre cette démarche ; il déclare à ce propos, que cette méthode linguistique a réussi plus au niveau mathématique (algèbre non commutative, groupes, monoïdes libres etc..), que sur le plan proprement linguistique. Il croit, sur ce plan, qu'une formalisation complète des langues naturelles est impossible. En gros, il pense que la procédure de la linguistique formelle est vouée à l'échec. De plus l'auteur montre à plusieurs reprises que la syntaxe est insuffisante, qu'il faut lui adjoindre la sémantique pour avoir une langue et un discours convaincants.¹⁰

- b) D'un autre côté, on a toujours montré, avec raison, le rapport des sciences cognitives à la logique. Cette idée est très claire en intelligence artificielle, ce n'est pas étonnant que René Thom critique, souvent d'une façon très violente ces sciences. Il n'accepte ni leur concept d'information ; ni celui de système. Il trouve que leur point de vue relatif à la régulation est entièrement faux. Il révoque leur méthode de symbolisation et celle qui

⁸ Cf. le chapitre 16 de *Modèles mathématique de la Morphogenèse*. Union générale de l'édition-Paris 1974, cité aussi dans notre étude intitulé, " La modélisation mathématique de la morphogenèse", DOGMA.

⁹ Cf., le premier chapitre de *Modèles mathématique de la morphogenèse (ibid.)*

¹⁰ Même ouvrage, p 141

intéresse le calcul du hasard. De toute façon, nous avons analysé la critique que fait Thom des sciences cognitives dans un travail précédent.¹¹

En somme, on peut soutenir que R Thom est un critique externe de la logique formelle puisqu'il se situe à l'extérieur de cette discipline, contrairement, à Tarski qui y appartient ; par conséquent, nos auteurs se situent différemment par rapport à la logique mathématique moderne. D'après ce qui précède, ils doivent avoir deux options mathématiques différentes.

II LA DIFFÉRENCE MATHÉMATIQUE ENTRE TARSKI ET THOM :

1) TARSKI ET L'ALGÈBRE.

L'abstraction accompagnant la pensée de Tarski ne peut aller qu'avec la science des nombres, l'algèbre. Cette idée est d'autant plus vraie qu'à l'époque le nombre requiert un grand degré d'intelligibilité. Rappelons-nous, par exemple, le concept de transfini chez Cantor et Zermelo. De toute façon, on est éloigné, au cours de la période où Tarski a écrit, du nombre conçu comme grandeur soutenue par la proportionnalité et la pensée géométrique, dont on trouve l'expression nette chez les grecs et même chez Galilée (et partiellement chez Newton). Cette conception tirée vers le concret est abandonnée, probablement, avec le savant français Laplace, elle est refusée, clairement, au temps de la logique mathématique et de Tarski. (même si elle rebondira d'une certaine manière avec le courant intuitionniste dirigé par Brouwer).¹²

De toute façon, Tarski est, effectivement, un algébriste et s'inscrit dans un courant que nous avons signalé où l'algèbre est prioritaire. Tarski s'est occupé beaucoup de l'algèbre et a produit plusieurs travaux dans ce domaine des mathématiques. Ce qu'on appelle, traditionnellement, « la théorie de Tarski » en témoigne. Dans cet essai, l'auteur a utilisé des techniques logiques et algébriques très proches de celles qu'utilise Gödel. Cette théorie examine la définition d'un ensemble de nombres réels dans le langage arithmétique. Notre mathématicien pense, à ce propos, qu'il est nécessaire de trouver, dans cette langue, un énoncé qu'on ne peut vérifier qu'au moyen des nombres réels constituant l'ensemble considéré

La tendance algébrisant de Tarski n'étonne pas puisqu'il est né dans une famille d'algébristes qui est celle des mathématiciens, logicien. Boole a écrit ce qu'on appelle traditionnellement « l'algèbre de Boole » qui s'intéresse aux opérations relatives aux variables logiques et leurs fonctions. Hilbert a produit la théorie des constantes. Ce savant, a, d'autre part, justifié et défendu la théorie des transfinis de

¹¹ "René Thom : Critique des sciences cognitives" in [PLASTIR n°27, 06/12](#)

¹² C'est là une discussion actuelle sur les rapports entre le logicisme et l'intuitionnisme. Elle s'est déclenchée lors de la crise des fondements à la fin du 19ème siècle. Le point de départ de l'intuitionnisme serait Kant qui relie les mathématiques à la sensibilité a priori.

Cantor. Du côté des “sémanticiens” (Frege, Russel...), on ne peut pas nier l’activité algébrique chez eux. Frege est connu pour s’être occupé d’une façon fondamentale du calcul des prédicats d’abord, puis de celui des propositions.

Quant à Russel, il faut citer à ce propos, le livre qu’il a écrit avec Whitehead ; nous voulons parler des *Principia mathematica*. Cet ouvrage constitue, en somme, une réaction vis-à-vis des travaux de l’algébriste Peano relatifs à l’axiomatisation de l’arithmétique. D’un autre côté, cette œuvre importante s’occupe, également, des contradictions où Frege est tombé.¹³ René Thom, comme critique du formalisme logique producteur, nécessairement, du nombre et de la quantification, aurait une autre direction mathématique.

2) RENÉ THOM ET L’ESPRIT GÉOMÉTRIQUE

Justement cet auteur exclut toute quantification de son système et de sa modélisation et la réserve aux seules lois fondamentales de la physique. On peut dire que c’est un grand critique de la mesure et de l’usage des nombres. Sur cette question que nous avons examinées, ailleurs, longuement, les textes thomiens sont nombreux.¹⁴

Ces cadres vides que présente la syntaxe se trouvent en dehors de la considération de la quantité et ne peuvent pas avoir un contenu ayant trait à l’usage des nombres. R. Thom déclare expressément que ce contenu ne peut être que géométrique. Là aussi les textes de Thom abondent, mais retenons, par exemple 1) L’étude sur le dogme saussurien de l’arbitraire du signe. Voulant expliquer le rapport entre signifiant et signifié et, par là-même, l’objectivité de celui-ci, l’auteur évoque le modèle de son collègue Zeeman dont la signification ultime est, selon lui, géométrique, 2) D’autre part, il soumet la sémiologie (image, indice et signe) aux processus géométriques 3) En général, pour vérifier la signification de tout concept et sa crédibilité, il pense qu’il faut le géométriser. Il donne, à ce niveau, l’exemple des mots comme ceux de message, d’ordre, d’information et d’organisation... Il va même jusqu’à croire que le concept héraclitien de devenir est véridique, car il est susceptible d’être géométrisé.¹⁵

Sa spécialité dont la modélisation qu’il présente porte l’empreinte, c’est la topologie différentielle qui a trait, évidemment, à la géométrie différentielle comme le montre, d’ailleurs, l’analyse qu’il en fait dans ses textes où l’esprit géométrique est manifeste, mais où on évite de calculer la dérivée, comme le font les spécialistes de la différentiation parmi les mathématiciens adeptes de la mesure.¹⁶

¹³ Cf. notre livre, en arabe, *La modélisation scientifique et ses fondements*, à paraître dans dar Attalia, Beirut. (Première partie)

¹⁴ Cf. par exemple son article, “ la controverse ” chapitre 7 de son livre, *Les modèles mathématiques de la morphogenèse* (ibid.)

¹⁵ Cf. 12 et 13 chapitres de ce même ouvrage.

¹⁶ Cf. 1er chapitre du même ouvrage – du reste, l’usage de l’idée de forme, essentielle dans toute géométrie, est fondamentale chez R. Thom, le morphogenèse l’implique clairement, la catastrophe est une forme etc.

Cependant, il faut préciser, sur ce plan, que la géométrie thomienne en question est, nécessairement, liée à une certaine dynamique. L'auteur insiste là-dessus à plusieurs reprises. Il le souligne avec insistance, par exemple, dans son article «une théorie dynamique de la morphogenèse » cité ; dans ce même texte, l'auteur associe bien les concentrations au temps dans l'équation à la quelle ses analyses topologiques aboutissent, ce qui veut dire qu'on est sur un plan dynamique. De toute façon, la topologie différentielle à la Thom implique l'évolution et le changement, c'est, en tout cas, ce que montrent les textes. De même, le concept de morphogenèse sur quoi repose son modélisme suppose l'existence de la dynamique puisqu'on a affaire à un processus "créateur ou destructeur de formes".

La dynamique, ici, est différente de celle qu'adoptent les classiques. L'auteur insiste sur cette différence dans plusieurs textes comme celui que nous venons de citer. Au fond ce que l'auteur reproche au classicisme, c'est son déterminisme, on conçoit l'objet d'une façon a priori, sans référence à son origine, à sa mort et à son évolution qui sont des éléments importants chez Thom, pour penser un objet qu'on sort de cette manière, du déterminisme.

On peut donc conclure que Tarski et Thom, conformément, à leurs positions respectives, par rapport à la logique mathématique, ont appartenu à deux branches différentes des mathématiques : d'un côté, Tarski a suivi la voie algébrique, qui est celle de ces prédécesseurs logiciens et qui l'a obligé à être dans l'abstraction ; de l'autre R. Thom est géomètre avec un sens précis que nous avons délimité. Cette double conclusion a des conséquences ontologiques sûres.

III L'ONTOLOGIE : PLATON ET ARISTOTE

1) TARSKI EST PLATONICIEN

Notons, d'abord, que l'urgence du calcul qui habite la pensée tarskienne (et celle des autres logiciens de l'époque, est platonicienne, même si Tarski conçoit le nombre, pour ainsi parler, (comme ses collègues, comme nous l'avons déjà signalé) d'une façon "non platonicienne". Pythagore a mesuré, certes, à sa manière, mais Platon a justifié l'idée de mesure et de calcul. Le livre 7 de *la République* en est une preuve éclatante. De toute façon, on peut soutenir que Platon nous a appris à mesurer et à calculer, qu'il a précédé, sur ce plan, Descartes et Leibniz qui peuvent être considérés, sous cet angle, comme platoniciens.

Cette tendance à calculer est idéalisée et idéalissante. Nous avons, d'ailleurs, noté dans ce qui précède, l'aspect idéal de la pensée tarskienne. On tombe ainsi de nouveau dans le platonisme, dans l'idéalisme platonicien. On évoque, souvent, à ce

niveau précis, la théorie des idées de Platon ; mais nous avons rencontré dans notre étude “*Les modèles scientifiques en philosophie*” (Dogma), une idéalité mathématique chez ce philosophe qui s’effectue dans la caverne, avant l’avènement de la dialectique. Il s’agit, en somme, d’une pensée discursive qui dépasse son point de départ sensible, relevant de l’opinion, pour se situer au niveau de modèles abstraits (le carré en soi, la diagonale en soi, etc...) Là encore, le livre 7 de la *République* nous renseigne bien sur ce genre d’idéalité. Nous pouvons même penser que Tarski, se désintéressant de toute métaphysique, serait plus proche de ce second genre d’idéalité platonicienne (ou du platonisme).¹⁷

De toute façon, les anglo-saxons ont forgé un concept de l’idéalité platonicienne qui s’applique parfaitement à Tarski. Le projet principal du platonisme serait d’assurer l’objectivité et l’exactitude des propositions logiques et mathématiques. Pour y arriver, il se fonde sur des éléments linguistiques atomiques, idéaux, il se tient à l’écart du bon sens et du langage naturel et refuse toute genèse empirique des idées et des concepts. Or cette réduction du platonisme va tout à fait à Tarski : celui-ci part toujours d’atomes du langage, son propos porte uniquement sur le langage formalisé. Enfin, les concepts qu’il utilise n’ont pas de rapport avec l’expérience.¹⁸ Par conséquent, quelle que soit le sens qu’on donne au platonisme, Tarski est, nécessairement, platonicien.

2) THOM EST ARISTOTÉLICIEEN

Par contre, R. Thom, refusant, catégoriquement, la quantification dans son système, ne peut pas être platonicien. Son idéalisme est un phénoménisme qui viendrait de Kant et, surtout, de Husserl qu’il connaît bien. Ce n’est donc pas, étonnant qu’il ne s’intéresse pas beaucoup à Platon dans ses écrits.¹⁹ L’esprit géométrique qu’il manifeste, comme nous avons vu, le tire plutôt vers le concret, vers le réel. Notre auteur paraît être plutôt un adepte d’Aristote qui est un symbole du réalisme.

De fait, ce philosophe grec (le premier maître comme disent les philosophes arabes du moyen âge) s’oppose, sur ce plan, à Platon et refuse, d’une façon catégorique, sa théorie des idées qui nous fait rompre avec la réalité et que Platon n’a jamais abandonnée, malgré les changements apportés à sa philosophie au cours de son évolution. A l’encontre des procédés irréalistes qu’adopte son maître, Aristote préfère scruter la réalité. C’est pourquoi, il a décidé d’évacuer, de son système, toute sorte de mythologie (où on peut inscrire Platon lui-même d’ailleurs). Le réalisme aristotélicien se manifeste aussi au niveau de sa défiance à l’égard des procédés dialectiques en général qui procèdent par des raisons sans relation avec l’expérience ; etc.²⁰

¹⁷ Cf. notre article in DOGMA sur Tarski

¹⁸ Ibid.

¹⁹ Cf. notre article in DOGMA, La modélisation scientifique chez Thom

²⁰ Ibid.

René Thom est, effectivement, aristotélien. Les textes permettent de parler du fétichisme de notre auteur pour Aristote. Il lui doit, non seulement, le réalisme, mais aussi la prégnance de l'idée de forme, très importante chez le philosophe grec. Notre mathématicien fait renaître des idées aristotéliennes qu'on croit avoir oubliées comme celles de tendances naturelles, de l'intelligence de la matière et la possibilité de dialoguer avec elle, etc. Enfin, n'oublions pas qu'à la fin de sa vie, René Thom a écrit sur Aristote, le topologiste. Il est clair, par conséquent, que Thom et Tarski sont, ontologiquement, opposés. C'est une conséquence inévitable de leur positionnement par rapport à la logique formelle et de leurs options mathématiques respectives.

CONCLUSION : DEUX CONCEPTIONS DIFFÉRENTES DE LA SÉMANTIQUE

Ayant deux positions différentes par rapport à la logique moderne, Tarski et Thom ont fait usage de deux branches générales des mathématiques, c'est-à-dire, respectivement, l'algèbre et la géométrie (dont la signification est très précise chez Thom.) De là a suivi l'existence de deux sous-bassements ontologiques distincts. L'algèbre, nécessairement, idéale et mesurante nous porte, tout naturellement, au platonisme, symbole de l'idéalisme et de la mesure. Quant à la géométrie en général (et chez Thom, en particulier) plus proche du concret et du réel, nous mène à Aristote, qui est connu pour son réalisme et que Thom considère comme tel. Par conséquent, si nos deux auteurs s'unissent pour marquer l'importance et même la priorité de la sémantique, ils sont très différents lorsqu'il s'agit de la signification de ce concept. En somme, on peut dire que Thom est un critique sérieux de son prédécesseur, Tarski. Il ne le cite, manifestement, pas, mais n'oublions pas qu'il a critiqué, violemment, le courant logiciste où il s'inscrit.

ICONOGRAPHIE : Photographies retouchées. Source Wikipedia. Droite : *Mathematician Alfred Tarski in Berkeley, 1980.* [Bergman, George M.](#) Images from the [Oberwolfach Photo Collection](#). Gauche : *Mathematician René Thom in Nice, 1970.* Konrad Jacobs, Erlangen. http://owpodb.mfo.de/detail?photo_id=4170. MFO License.